LCE0216
Introdução à Bioestatística Florestal

2. Estatística Descritiva

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio

Monitores: Eduardo E. R. Junior & Giovana Fumes

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 06 de março de 2018

Medidas de posição (ou tendência) central

Medidas de posição (ou tendência) indicam posições de interesse sobre a distribuição dos dados.

As principais medidas de posição central são a **média**, a **mediana** e a **moda**.

Média aritmética

Se temos os valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$, a média aritmética é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Média aritmética
Se temos os valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$, a média aritmética é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exemplo: Considere os valores $2, 7, 5, 4, 9, 11$. Então

$$\bar{x} = \frac{2+7+5+4+9+11}{6} = 6,33.$$

Medida de posição central - Média

Exemplo:

Com o objetivo de avaliar a produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, em kg, foram observadas dez árvores, cujos correspondentes valores são apresentados a seguir:

1,9	2,1	3,4	2,3	2,3
5,5	2,6	1,5	1,8	2,0

Calcule a média da produção anual de resina.

Exemplo:

Com o objetivo de avaliar a produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, em kg, foram observadas dez árvores, cujos correspondentes valores são apresentados a seguir:

1,9	2,1	3,4	2,3	2,3
5,5	2,6	1,5	1,8	2,0

Calcule a média da produção anual de resina.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1,9 + 2,1 + \ldots + 2,0}{10} \\ &= \frac{25,4}{10} \\ &= 2,54\text{kg}.\end{aligned}$$

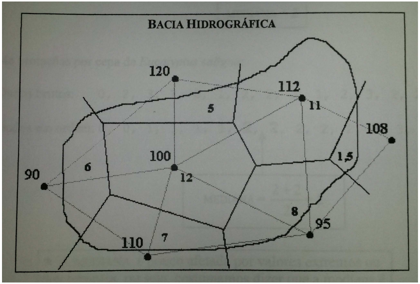
Média Aritmética Ponderada

A média ponderada dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, representada por $\bar{x}_p$, é definida por

$$\bar{x}_p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Exemplo: Precipitação média em uma bacia hidrográfica.

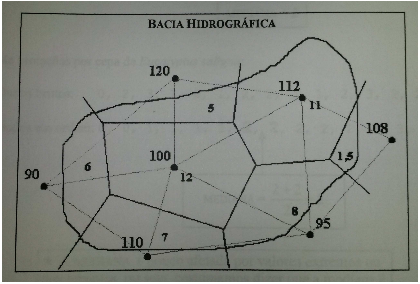
Precipitação X_i (mm)	Área do polígono p_i (km^2)
90	6
110	7
120	5
100	12
112	11
95	8
108	1,5
Total	50,5



Média Aritmética Ponderada

Exemplo: Precipitação média em uma bacia hidrográfica.

Precipitação X_i (mm)	Área do polígono p_i (km^2)
90	6
110	7
120	5
100	12
112	11
95	8
108	1,5
Total	50,5



$$\bar{x}_p = \frac{90 \times 6 + 110 \times 7 + \ldots + 108 \times 1,5}{50,5} = 104,24.$$

Medida de posição central - Média

Se os dados estão organizados em **tabelas de frequências**, caso das variáveis quantitativas discretas, a média aritmética pode ser calculada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i.$$

Medida de posição central - Média

Exemplo: Em um estudo realizado para avaliar o número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte, foram utilizadas 40 plantas.

Tabela: Cálculo auxiliar da média de dados em tabela de frequências.

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	7	0
1	11	11
2	14	28
3	8	24
Total	40	63

Média: $\bar{x} = \frac{63}{40} = 1,575$.
A média será 1,575 brotos/planta.

Medida de posição central - Média

Se a variável é quantitativa contínua e está agrupada em intervalos de classe, a média aritmética é dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^* f_i,$$

em que x_i^* é o ponto médio do intervalo de classe.

Medida de posição central - Média

Exemplo: Vamos retomar ao exemplo do diâmetro das árvores em uma floresta.

Seja x_i^*: ponto médio do intervalo de classe e f_i: a frequência do intervalo de classe.

Tabela: Tabela auxiliar para o cálculo da média de dados em tabela de frequências com intervalos de classe.

Classes	x_i^*	f_i	$x_i^* f_i$
$10,2 \vdash 22,0$	16,1	22	354,20
$22,0 \vdash 33,8$	27,9	6	167,40
$33,8 \vdash 45,6$	39,7	2	79,40
$45,6 \vdash 57,4$	51,5	5	257,50
$57,4 \vdash 69,2$	63,3	2	126,60
$69,2 \vdash 81,0$	75,1	2	150,20
$81,0 \vdash 92,8$	86,9	1	86,90
Total		40	1222,20
Média	$1222,20/40 = 30,56$		

Medida de posição central - Média

Observação: A média é sensível a observações discrepantes, isto é, se existirem valores fora do intervalo de maior concentração dos dados, esses valores influenciam fortemente a média. Neste caso, a média pode não ser um bom representante da tendência central dos dados.

Uma outra medida de tendência central, que é pouco influenciada por observações discrepantes, é a **mediana**.

Mediana
Se temos os valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$, a mediana é calculada da forma:

i Ordene os dados em ordem crescente, ou seja, $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ e
ii Calcule

$$\text{Md} = \begin{cases} \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ é par;} \\ x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observação: Note como a mediana é pouco afetada por valores extremos ou discrepantes.

Medida de posição central - Mediana

Considere os valores 7, 9, 2, 5, 4.

Medida de posição central - Mediana

Considere os valores 7, 9, 2, 5, 4.

Ordenando os valores têm-se:

$$x_{(1)} = 2, x_{(2)} = 4, x_{(3)} = 5, x_{(4)} = 7, x_{(5)} = 9.$$

Medida de posição central - Mediana

Considere os valores 7, 9, 2, 5, 4.

Ordenando os valores têm-se:

$$x_{(1)} = 2, x_{(2)} = 4, x_{(3)} = 5, x_{(4)} = 7, x_{(5)} = 9.$$

Como $n = 5$ (ímpar), a mediana será dada por

Medida de posição central - Mediana

Considere os valores 7, 9, 2, 5, 4.

Ordenando os valores têm-se:

$$x_{(1)} = 2, x_{(2)} = 4, x_{(3)} = 5, x_{(4)} = 7, x_{(5)} = 9.$$

Como $n = 5$ (ímpar), a mediana será dada por

$$\text{Md} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{5+1}{2}\right)} = x_{(3)} = 5.$$

Medida de posição central - Mediana

Exemplo: Para os valores observados de produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, tem-se o seguinte rol:

1,5	1,8	1,9	2,0	2,1	2,3	2,3	2,6	3,4	5,5

Como n é par,

1,5 1,8 1,9 2,0 **2,1** **2,3** 2,3 2,6 3,4 5,5

Medida de posição central - Mediana

Exemplo: Para os valores observados de produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, tem-se o seguinte rol:

1,5	1,8	1,9	2,0	2,1	2,3	2,3	2,6	3,4	5,5

Como n é par,

1,5 1,8 1,9 2,0 **2,1** **2,3** 2,3 2,6 3,4 5,5

$$\begin{aligned} \text{Md} &= \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{2,1 + 2,3}{2} = \frac{4,4}{2} \\ &= 2,2\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Medida de posição central - Mediana

Para dados discretos dispostos em tabela de frequências, a classe mediana é obtida fazendo o cálculo da **frequência acumulada**, que é a soma (ou valor total) de todas as frequências até o ponto desejado, e verificando o local no qual a se encontra o rol mediano.

Medida de posição central - Mediana

Para dados discretos dispostos em tabela de frequências, a classe mediana é obtida fazendo o cálculo da **frequência acumulada**, que é a soma (ou valor total) de todas as frequências até o ponto desejado, e verificando o local no qual a se encontra o rol mediano.

Exemplo: Número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

Tabela: Distribuição de frequências para a variável número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

Número de brotos	f_i	F_i
0	7	7
1	11	18
2	14	**32**
3	8	40
Total	40	

Medida de posição central - Mediana

Para dados discretos dispostos em tabela de frequências, a classe mediana é obtida fazendo o cálculo da **frequência acumulada**, que é a soma (ou valor total) de todas as frequências até o ponto desejado, e verificando o local no qual a se encontra o rol mediano.

Exemplo: Número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

Tabela: Distribuição de frequências para a variável número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

Número de brotos	f_i	F_i
0	7	7
1	11	18
2	14	**32**
3	8	40
Total	40	

$$\text{Md} = 2$$

Medida de posição central - Mediana

Se os dados são de uma variável contínua e estiverem agrupados em classes, a mediana é dada por:

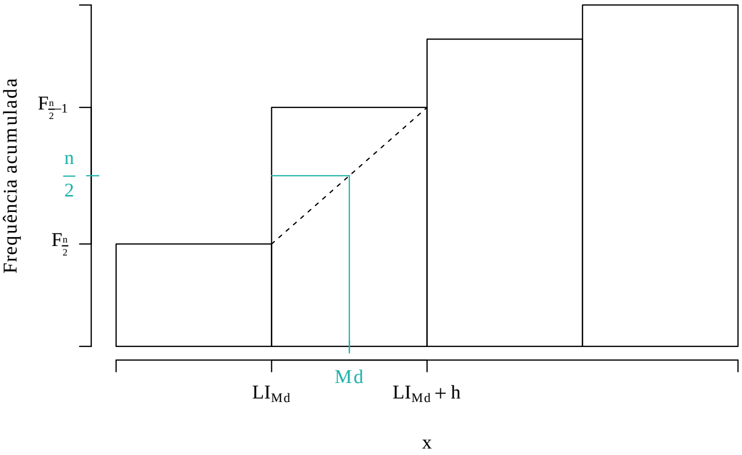
$$\text{Md} = LI_{Md} + \frac{\frac{n}{2} - F_{\frac{n}{2}-1}}{f_{\frac{n}{2}}} h,$$

em que:

- LI_{Md} é limite inferior da classe mediana,
- n é o tamanho da amostra,
- $F_{\frac{n}{2}-1}$ é frequência acumulada anterior à classe mediana,
- $f_{\frac{n}{2}}$ é a frequência da classe mediana,
- h é a amplitude do intervalo.

Medida de posição central - Mediana

$$\text{Md} = LI_{Md} + \frac{\frac{n}{2} - F_{\frac{n}{2}-1}}{f_{\frac{n}{2}}} h,$$



Medida de posição central - Mediana

Exemplo: Diâmetro das árvores em uma floresta.

Tabela: Distribuição de frequências para diâmetro das árvores em uma floresta.

Diâmetro	f_i	F_i
10,2 ⊢ 22,0	22	22
22,0 ⊢ 33,8	6	28
33,8 ⊢ 45,6	2	30
45,6 ⊢ 57,4	5	35
57,4 ⊢ 69,2	2	37
69,2 ⊢ 81,0	2	39
81,0 ⊢ 92,8	1	40
Total	40	

Medida de posição central - Mediana

Exemplo: Diâmetro das árvores em uma floresta.

Tabela: Distribuição de frequências para diâmetro das árvores em uma floresta.

Diâmetro	f_i	F_i
10,2 $\vdash$ 22,0	22	22
22,0 $\vdash$ 33,8	6	28
33,8 $\vdash$ 45,6	2	30
45,6 $\vdash$ 57,4	5	35
57,4 $\vdash$ 69,2	2	37
69,2 $\vdash$ 81,0	2	39
81,0 $\vdash$ 92,8	1	40
Total	40	

$$\text{Md} = LI_{Md} + \frac{\frac{n}{2} - F_{\frac{n}{2}-1}}{f_{\frac{n}{2}}} h = 10,2 + \frac{\frac{40}{2} - 0}{22} 11,8 = 20,93$$

Medida de posição central - Mediana

Uma outra forma para se calcular a mediana por meio de dados agrupados é exemplificada a seguir.

Tabela: Distribuição de frequências dos diâmetros (cm) das árvores em uma floresta nativa.

X_i	x_i^*	f_i	F_i	F_i'
10,0 ⊢ 20,0	15,0	39	39	0,39
20,0 ⊢ 30,0	25,0	22	61	0,61
30,0 ⊢ 40,0	35,0	10	71	0,71
40,0 ⊢ 50,0	45,0	10	81	0,81
50,0 ⊢ 60,0	55,0	8	89	0,89
60,0 ⊢ 70,0	65,0	4	93	0,93
70,0 ⊢ 80,0	75,0	3	96	0,96
80,0 ⊢ 160,0	120	4	100	1,00
Total		100		

$$\begin{cases} 30,0 - 20,0 & \longleftrightarrow & 0,61 - 0,39 \\ \text{Md} - 20,0 & \longleftrightarrow & 0,50 - 0,39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10,0 & \longleftrightarrow & 0,22 \\ \text{Md} - 20,0 & \longleftrightarrow & 0,11 \end{cases}$$

Medida de posição central - Mediana

Uma outra forma para se calcular a mediana por meio de dados agrupados é exemplificada a seguir.

Tabela: Distribuição de frequências dos diâmetros (cm) das árvores em uma floresta nativa.

X_i	x_i^*	f_i	F_i	F_i'
10,0 ⊢ 20,0	15,0	39	39	0,39
20,0 ⊢ 30,0	25,0	22	61	0,61
30,0 ⊢ 40,0	35,0	10	71	0,71
40,0 ⊢ 50,0	45,0	10	81	0,81
50,0 ⊢ 60,0	55,0	8	89	0,89
60,0 ⊢ 70,0	65,0	4	93	0,93
70,0 ⊢ 80,0	75,0	3	96	0,96
80,0 ⊢ 160,0	120	4	100	1,00
Total		100		

$$\begin{cases} 30,0 - 20,0 & \longleftrightarrow & 0,61 - 0,39 \\ \text{Md} - 20,0 & \longleftrightarrow & 0,50 - 0,39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10,0 & \longleftrightarrow & 0,22 \\ \text{Md} - 20,0 & \longleftrightarrow & 0,11 \end{cases}$$

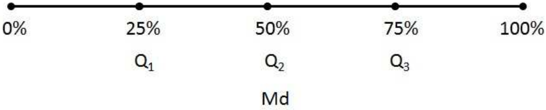
$$(\text{Md} - 20,0) \times 0,22 = 10 \times 0,11$$

$$\text{Md} = \frac{10 \times 0,11}{0,22} + 20$$

$$\text{Md} = 25,0\,\text{cm}.$$

- **Quartil**: generalização da mediana.

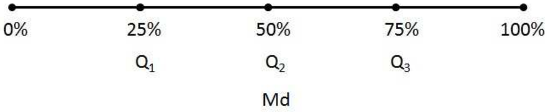
$$\text{Quartil} \Rightarrow 4 \text{ partes}$$



Quartis e Percentis

- **Quartil**: generalização da mediana.

$$\text{Quartil} \Rightarrow 4 \text{ partes}$$



- **Percentil de ordem $100p$.**

$$P_{100p} = \begin{cases} \dfrac{x_{(np)} + x_{(np+1)}}{2}, & \text{se } np \text{ for inteiro;} \\ x_{(\text{int}(np)+1)}, & \text{se } np \text{ não for inteiro.} \end{cases}$$

Quartis e Percentis

Exemplo: Para os valores observados de produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, tem-se:

1,5	1,8	1,9	2,0	2,1
2,3	2,3	2,6	3,4	5,5

$n = 10$

Obter $P_{75} = Q_3$ e P_{20}

Exemplo: Para os valores observados de produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, tem-se:

1,5	1,8	1,9	2,0	2,1
2,3	2,3	2,6	3,4	5,5

$n = 10$

Obter $P_{75} = Q_3$ e P_{20}

- $P_{75} \quad \Rightarrow \quad np = 10 \times 0,75 = 7,5$

$$\begin{aligned} P_{75} = Q_3 &= x_{(\text{int}(7{,}5)+1)} \\ &= x_{(7+1)} = x_{(8)} \\ &= 2,6\,\text{Kg} \end{aligned}$$

Exemplo: Para os valores observados de produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, tem-se:

1,5	1,8	1,9	2,0	2,1
2,3	2,3	2,6	3,4	5,5

$n = 10$
Obter $P_{75} = Q_3$ e P_{20}

- $P_{75} \quad \Rightarrow \quad np = 10 \times 0,75 = 7,5$

$$\begin{aligned} P_{75} = Q_3 &= x_{(\text{int}(7{,}5)+1)} \\ &= x_{(7+1)} = x_{(8)} \\ &= 2,6\,\text{Kg} \end{aligned}$$

- $P_{20} \quad \Rightarrow \quad np = 10 \times 0,20 = 2$

$$\begin{aligned} P_{20} &= (x_{(2)} + x_{(3)})/2 \\ &= (1,8 + 1,9)/2 \\ &= 1,85\,\text{Kg} \end{aligned}$$

- Dados agrupados em tabelas de frequências

Tabela: Distribuição de frequências para o conjunto de dados de número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

X_i	f_i	f_i'	F_i	F_i'
0	7	0,175	7	0,175
1	11	0,275	18	0,450
2	14	0,350	32	0,800
3	8	0,200	40	1,000
Total	40	1,00		

Obter $P_{25} = Q_1$, P_{50} e $P_{97,5}$.

- Dados agrupados em tabelas de frequências

Tabela: Distribuição de frequências para o conjunto de dados de número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

X_i	f_i	f'_i	F_i	F'_i
0	7	0,175	7	0,175
1	11	0,275	18	0,450
2	14	0,350	32	0,800
3	8	0,200	40	1,000
Total	40	1,00		

Obter $P_{25} = Q_1$, P_{50} e $P_{97,5}$.

- Observar $F'_i \geq 0,25$
- Observar $F'_i \geq 0,50$
- Observar $F'_i \geq 0,975$

Quartis e Percentis

- Dados agrupados em tabelas de frequências

Tabela: Distribuição de frequências para o conjunto de dados de número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

X_i	f_i	f_i'	F_i	F_i'
0	7	0,175	7	0,175
1	11	0,275	18	0,450
2	14	0,350	32	0,800
3	8	0,200	40	1,000
Total	40	1,00		

Obter $P_{25} = Q_1$, P_{50} e $P_{97,5}$.

- Observar $F_i' \geq 0,25$

$$P_{25} = Q_1 = 1$$

- Observar $F_i' \geq 0,50$

- Observar $F_i' \geq 0,975$

- Dados agrupados em tabelas de frequências

Tabela: Distribuição de frequências para o conjunto de dados de número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

X_i	f_i	f_i'	F_i	F_i'
0	7	0,175	7	0,175
1	11	0,275	18	0,450
2	14	0,350	32	0,800
3	8	0,200	40	1,000
Total	40	1,00		

Obter $P_{25} = Q_1$, P_{50} e $P_{97,5}$.

- Observar $F_i' \geq 0,25$

$$P_{25} = Q_1 = 1$$

- Observar $F_i' \geq 0,50$

$$P_{50} = 2$$

- Observar $F_i' \geq 0,975$

- Dados agrupados em tabelas de frequências

Tabela: Distribuição de frequências para o conjunto de dados de número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

X_i	f_i	f'_i	F_i	F'_i
0	7	0,175	7	0,175
1	11	0,275	18	0,450
2	14	0,350	32	0,800
3	8	0,200	40	1,000
Total	40	1,00		

Obter $P_{25} = Q_1$, P_{50} e $P_{97,5}$.

- Observar $F'_i \geq 0,25$

$$P_{25} = Q_1 = 1$$

- Observar $F'_i \geq 0,50$

$$P_{50} = 2$$

- Observar $F'_i \geq 0,975$

$$P_{97,5} = 3$$

Quartis e percentis

Se os dados são de uma variável contínua e estiverem agrupados em intervalos de classe, o primeiro quartil pode ser calculado por:

$$Q_1 = LI_{Q_1} + \frac{\frac{n}{4} - F_{\frac{n}{4}-1}}{f_{Q_1}} h,$$

em que:

- LI_{Q_1} é o limite inferior da classe Q_1,
- n é o tamanho da amostra,
- $F_{\frac{n}{4}-1}$ é a frequência acumulada anterior à classe que contém Q_1,
- f_{Q_1} é a frequência da classe Q_1 e
- h é a amplitude do intervalo.

Quartis e Percentis

Exemplo: Obter $P_{25} = Q_1$ para os dados referentes aos diâmetros das árvores, dispostos na seguinte tabela:

Tabela: Distribuição de frequências para diâmetro das árvores.

Diâmetro	f_i	f'_i	F_i	F'_i
10,2 ⊢ 22,0	22	0,550	22	0,550
22,0 ⊢ 33,8	6	0,150	28	0,700
33,8 ⊢ 45,6	2	0,050	30	0,750
45,6 ⊢ 57,4	5	0,125	35	0,875
57,4 ⊢ 69,2	2	0,050	37	0,925
69,2 ⊢ 81,0	2	0,050	39	0,975
81,0 ⊢ 92,8	1	0,025	40	1,000
Total	40	1,00		

Quartis e Percentis

Exemplo: Obter $P_{25} = Q_1$ para os dados referentes aos diâmetros das árvores, dispostos na seguinte tabela:

Tabela: Distribuição de frequências para diâmetro das árvores.

Diâmetro	f_i	f_i'	F_i	F_i'
10,2 $\vdash$ 22,0	22	0,550	22	0,550
22,0 $\vdash$ 33,8	6	0,150	28	0,700
33,8 $\vdash$ 45,6	2	0,050	30	0,750
45,6 $\vdash$ 57,4	5	0,125	35	0,875
57,4 $\vdash$ 69,2	2	0,050	37	0,925
69,2 $\vdash$ 81,0	2	0,050	39	0,975
81,0 $\vdash$ 92,8	1	0,025	40	1,000
Total	40	1,00		

$$Q_1 = LI_{Q_1} + \frac{\frac{n}{4} - F_{\frac{n}{4}-1}}{f_{Q_1}} h = 10,2 + \frac{\frac{40}{4} - 0}{22} 11,8 = 15,56.$$

Quartis e Percentis

- Outra forma para o cálculo de quartis e percentis para dados agrupados em tabelas de classes de frequências.

Para o exemplo referente ao diâmetro das árvores, tem-se:

Tabela: Distribuição de frequências dos diâmetros (cm) das árvores em uma floresta nativa.

X_i	x_i^*	f_i	F_i	F_i'
10,0 ⊢ 20,0	15,0	39	39	0,39
20,0 ⊢ 30,0	25,0	22	61	0,61
30,0 ⊢ 40,0	35,0	10	71	0,71
40,0 ⊢ 50,0	45,0	10	81	0,81
50,0 ⊢ 60,0	55,0	8	89	0,89
60,0 ⊢ 70,0	65,0	4	93	0,93
70,0 ⊢ 80,0	75,0	3	96	0,96
80,0 ⊢ 160,0	120	4	100	1,00
Total		100		

Obter P_{20} e $P_{75} = Q_3$.

Quartis e Percentis

$P_{20} \;\Rightarrow\;$ classe: $10,0 \vdash 20,0$

$P_{75} \;\Rightarrow\;$ classe: $40,0 \vdash 50,0$

Quartis e Percentis

$P_{20} \;\Rightarrow\;$ classe: $10,0 \vdash 20,0$

$$\begin{cases} 20,0 - 10,0 & \longleftrightarrow & 0,39 \\ P_{20} - 10,0 & \longleftrightarrow & 0,20 \end{cases}$$

$$P_{20} = 10 + \tfrac{20,0-10,0}{0,39} \times 0,20$$
$$P_{20} = 15,1\text{cm}.$$

$P_{75} \;\Rightarrow\;$ classe: $40,0 \vdash 50,0$

Quartis e Percentis

$$P_{20} \;\Rightarrow\; \text{classe: } 10,0 \vdash 20,0$$

$$\begin{cases} 20,0 - 10,0 & \longleftrightarrow \quad 0,39 \\ P_{20} - 10,0 & \longleftrightarrow \quad 0,20 \end{cases}$$

$$P_{20} = 10 + \tfrac{20,0-10,0}{0,39} \times 0,20$$
$$P_{20} = 15,1\text{cm.}$$

$$P_{75} \;\Rightarrow\; \text{classe: } 40,0 \vdash 50,0$$

$$\begin{cases} 50,0 - 40,0 & \longleftrightarrow \quad 0,10 \\ P_{75} - 40,0 & \longleftrightarrow \quad 0,04 \end{cases}$$

$$P_{75} = 40 + \tfrac{50,0-40,0}{0,10} \times 0,04$$
$$P_{20} = 44,0\text{cm.}$$

Medida de posição central - Moda

A **moda** é o valor mais frequente da amostra, caso discreto, ou o valor com a mairo densidade de dados, caso contínuo.

Observação: Também pode ser obtida para variáveis qualitativas.

Exemplo: Para os dados observados de síndrone de regeneração de espécies arbóreas em uma floresta nativa, tem-se:

Síndrome de regeneração	Número de espécies	Percentual (%)
Heliófitas	4	13%
Oportunistas de clareira	11	37%
Tolerantes	15	50%

Medida de posição central - Moda

A **moda** é o valor mais frequente da amostra, caso discreto, ou o valor com a mairo densidade de dados, caso contínuo.

Observação: Também pode ser obtida para variáveis qualitativas.

Exemplo: Para os dados observados de síndrone de regeneração de espécies arbóreas em uma floresta nativa, tem-se:

Síndrome de regeneração	Número de espécies	Percentual (%)
Heliófitas	4	13%
Oportunistas de clareira	11	37%
Tolerantes	15	50%

$$\text{Mo} = \text{Tolerantes}$$

Medidas resumo - Moda

Exemplo: Número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

Tabela: Distribuição de frequências para a variável número de brotos deixados em cepas de *Eucalyptus grandis* após o primeiro corte.

Número de brotos	f_i
0	7
1	11
2	**14**
3	8
Total	40

$$\text{Mo} = 2$$

Medida de posição central - Moda

Se os dados são provenientes de uma variável quantitativa contínua e estão agrupados em intervalos de classe, a moda por calculada de diferentes formas:

Medida de posição central - Moda

Se os dados são provenientes de uma variável quantitativa contínua e estão agrupados em intervalos de classe, a moda por calculada de diferentes formas:

- Moda bruta: ponto médio da classe com maior frequência

Medida de posição central - Moda

Se os dados são provenientes de uma variável quantitativa contínua e estão agrupados em intervalos de classe, a moda por calculada de diferentes formas:

- Moda bruta: ponto médio da classe com maior frequência
- Moda: método de Czuber $\Rightarrow$ semelhança de triângulos

Medida de posição central - Moda

Se os dados são provenientes de uma variável quantitativa contínua e estão agrupados em intervalos de classe, a moda por calculada de diferentes formas:

- Moda bruta: ponto médio da classe com maior frequência
- Moda: método de Czuber $\Rightarrow$ semelhança de triângulos
- Fórmula: Mo $= LI_{Mo} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} h$

Medida de posição central - Moda

Para o exemplo referente ao diâmetro das árvores, tem-se:

Tabela: Distribuição de frequências dos diâmetros (cm) das árvores em uma floresta nativa.

X_i	x_i^*	f_i	F_i	F_i'
10,0 ⊢ 20,0	**15,0**	**39**	**39**	**0,39**
20,0 ⊢ 30,0	25,0	22	61	0,61
30,0 ⊢ 40,0	35,0	10	71	0,71
40,0 ⊢ 50,0	45,0	10	81	0,81
50,0 ⊢ 60,0	55,0	8	89	0,89
60,0 ⊢ 70,0	65,0	4	93	0,93
70,0 ⊢ 80,0	75,0	3	96	0,96
80,0 ⊢ 160,0	120	4	100	1,00
Total		100		

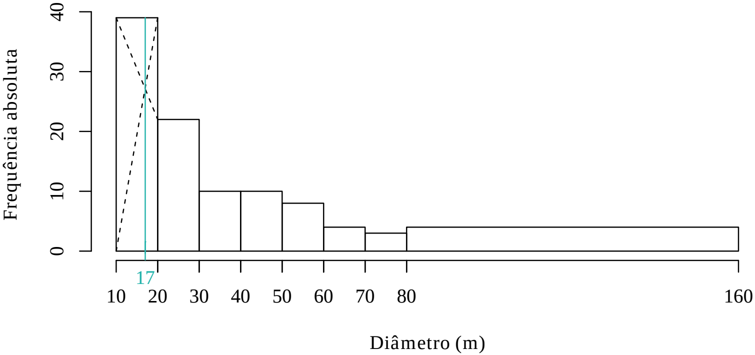
Para o exemplo referente ao diâmetro das árvores, tem-se:

Tabela: Distribuição de frequências dos diâmetros (cm) das árvores em uma floresta nativa.

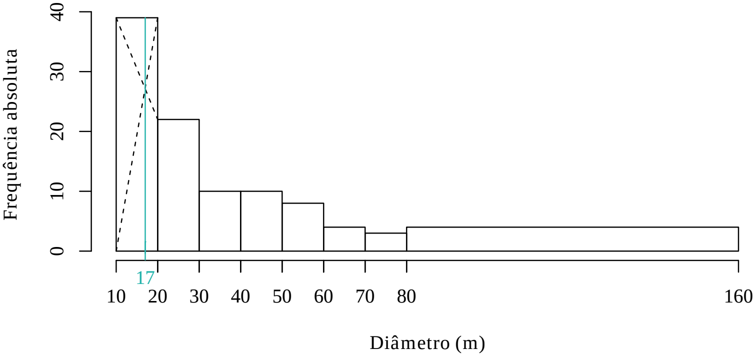
X_i	x_i^*	f_i	F_i	F_i'
10,0 ⊢ 20,0	**15,0**	**39**	**39**	**0,39**
20,0 ⊢ 30,0	25,0	22	61	0,61
30,0 ⊢ 40,0	35,0	10	71	0,71
40,0 ⊢ 50,0	45,0	10	81	0,81
50,0 ⊢ 60,0	55,0	8	89	0,89
60,0 ⊢ 70,0	65,0	4	93	0,93
70,0 ⊢ 80,0	75,0	3	96	0,96
80,0 ⊢ 160,0	120	4	100	1,00
Total		100		

Moda bruta:

$$
\begin{aligned}
\text{Mo} &= \frac{10,0 + 20,0}{2} \\
&= 15,0 \text{ cm}
\end{aligned}
$$



Frequência absoluta
0
10
20
30
40
17
10
20
30
40
50
60
70
80
160
Diâmetro (m)



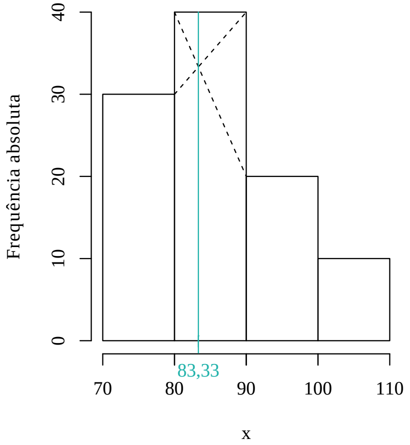
$$\begin{cases} 39 - 0 & \longleftrightarrow & 39 - 22 \\ \text{Mo} - 10,0 & \longleftrightarrow & 20 - \text{Mo} \end{cases}$$

$$\text{Mo} = \frac{(39-0)\times 20 + (39-22)\times 10}{(39-0)+(39-22)}$$

$$\text{Mo} = 17,0\text{cm}$$

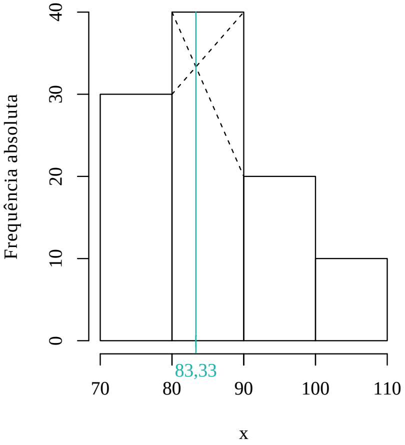
Medida de posição central - Moda

Supondo o seguinte histograma para uma variável X qualquer.



Medida de posição central - Moda

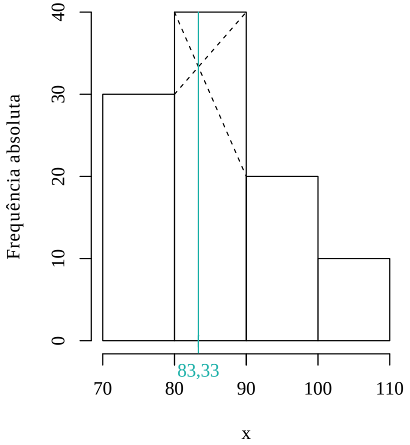
Supondo o seguinte histograma para uma variável X qualquer.



Classe correspondente à moda: $80 \vdash 90$

Medida de posição central - Moda

Supondo o seguinte histograma para uma variável X qualquer.

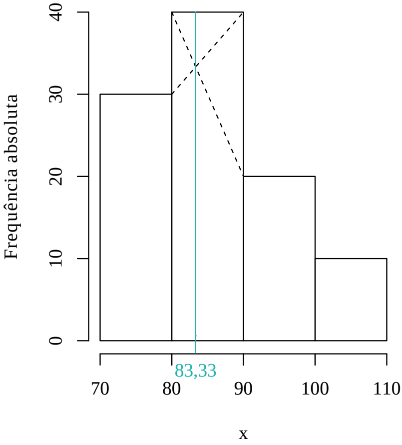


Classe correspondente à moda: $80 \vdash 90$

Moda bruta: $\text{Mo} = 85$

Medida de posição central - Moda

Supondo o seguinte histograma para uma variável X qualquer.



Classe correspondente à moda: $80 \vdash 90$

Moda bruta: $\text{Mo} = 85$

$$\begin{cases} 40 - 30 & \longleftrightarrow & 40 - 20 \\ \text{Mo} - 80 & \longleftrightarrow & 90 - \text{Mo} \end{cases}$$

$$(40 - 30)(90 - \text{Mo}) = (40 - 20)(\text{Mo} - 80)$$

$$\text{Mo} = \frac{(40 - 30) \times 90 + (40 - 20) \times 80}{(40 - 30) + (40 - 20)}$$

$$= 83,33$$

Medida de posição central - Moda

Fórmula:

$$\text{Mo} = LI_{Mo} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} h,$$

em que:

- LI_{Mo} é o limite inferior da classe modal,
- Δ_1 é a diferença de frequência entre a classe modal e a anterior,
- Δ_2 é a diferença de frequência entre a classe modal e a seguinte,
- h é aamplitude do intervalo de classe.

Medida de posição central - Moda

Tabela: Distribuição de frequências para diâmetro das árvores em uma floresta

Diâmetro	f_i
10,2 ⊢ 22,0	**22**
22,0 ⊢ 33,8	6
33,8 ⊢ 45,6	2
45,6 ⊢ 57,4	5
57,4 ⊢ 69,2	2
69,2 ⊢ 81,0	2
81,0 ⊢ 92,8	1
Total	40

Medida de posição central - Moda

Tabela: Distribuição de frequências para diâmetro das árvores em uma floresta

Diâmetro	f_i
10,2 ⊢ 22,0	**22**
22,0 ⊢ 33,8	6
33,8 ⊢ 45,6	2
45,6 ⊢ 57,4	5
57,4 ⊢ 69,2	2
69,2 ⊢ 81,0	2
81,0 ⊢ 92,8	1
Total	40

Logo, a moda será dada por:

$$\text{Mo} = LI_{Mo} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} h = 10,2 + \frac{(22,0 - 0)}{(22,0 - 0) + (22,0 - 6)} 11,8 = 17,03.$$

2. Medidas de dispersão

As medidas de dispersão são utilizadas para determinar a variabilidade dos dados em relação as medidas de posição.

2. Medidas de dispersão

As medidas de dispersão são utilizadas para determinar a variabilidade dos dados em relação as medidas de posição.

Principais medidas de dispersão:

- Amplitude;
- Distância interquartílica;
- Desvio médio;
- Variância;
- Desvio padrão;
- Coeficiente de variação.

Medidas de dispersão

Para esta sessão vamos considerar o seguinte exemplo:

Foram observadas cinco amostras de duas máquinas, quanto à gramatura do papel produzido, conforme a tabela a seguir:

	Máquina	
Amostra	A	B
1	152	205
2	248	203
3	260	195
4	200	197
5	140	200
média	200	200

Qual das máquinas a empresa deve adquirir? Por quê?

Medidas de dispersão - Amplitude

A amplitude é dada por:

$$A_x = \max(x) - \min(x)$$

Medidas de dispersão - Amplitude

A amplitude é dada por:

$$A_x = \max(x) - \min(x)$$

Exemplo: Considerando-se o exemplo da gramatura do papel, temos:

Máquina	Amplitude
A	$260 - 140 = 120$
B	$205 - 195 = 10$

Medidas de dispersão: Amplitude Interquartílica

A amplitude interquartílica é dada por:

$$\text{AIQ} = Q_3 - Q_1$$

Exemplo: Considerando-se o exemplo da gramatura do papel, temos os dados ordenados:

Máquina	A	140	152	200	248	260
	B	195	197	200	203	205

Medidas de dispersão: Amplitude Interquartílica

A amplitude interquartílica é dada por:

$$\text{AIQ} = Q_3 - Q_1$$

Exemplo: Considerando-se o exemplo da gramatura do papel, temos os dados ordenados:

Máquina	A	140	152	200	248	260
	B	195	197	200	203	205

$$np = 5 \times 0,25 = 1,25 \Rightarrow Q_1 = x_{(int(1{,}25)+1)} = x_2$$
$$np = 5 \times 0,75 = 3,75 \Rightarrow Q_3 = x_{(int(3{,}25)+1)} = x_4$$

Medidas de dispersão: Amplitude Interquartílica

A amplitude interquartílica é dada por:

$$\text{AIQ} = Q_3 - Q_1$$

Exemplo: Considerando-se o exemplo da gramatura do papel, temos os dados ordenados:

Máquina						
	A	140	152	200	248	260
	B	195	197	200	203	205

$$np = 5 \times 0,25 = 1,25 \Rightarrow Q_1 = x_{(int(1,25)+1)} = x_2$$
$$np = 5 \times 0,75 = 3,75 \Rightarrow Q_3 = x_{(int(3,25)+1)} = x_4$$

Máquina	Q_1	Q_3	AIQ
A	152	248	$Q_3 - Q_1 = \mathbf{96}$
B	197	203	$Q_3 - Q_1 = \mathbf{6}$

Medidas de dispersão - Desvio Médio

- Desvio de uma observação em relação a uma constante:

$$d_i = x_i - k$$

Medidas de dispersão - Desvio Médio

- Desvio de uma observação em relação a uma constante:

$$d_i = x_i - k$$

- Desvio de uma observação em relação à média aritmética:

$$e_i = x_i - \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} e_i = \ ?$$

Medidas de dispersão - Desvio Médio

- Desvio de uma observação em relação a uma constante:

$$d_i = x_i - k$$

- Desvio de uma observação em relação à média aritmética:

$$e_i = x_i - \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} e_i = \ ?$$

- Desvio de uma observação em relação a uma constante:

$$d_i = x_i - k$$

- Desvio de uma observação em relação à média aritmética:

$$e_i = x_i - \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} e_i = \ ?$$

- **Desvio Médio**

$$Dm_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |e_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

Exemplo: Considerando-se o exemplo da gramatura do papel, temos:

Maquina	Desvios					$\sum_{i=1}^{5} \lvert e_i \rvert / 5$
A	-48	48	60	0	-60	
B	5	3	-5	-3	0	

Exemplo: Considerando-se o exemplo da gramatura do papel, temos:

Maquina	Desvios					$\sum_{i=1}^{5} \lvert e_i \rvert / 5$
A	-48	48	60	0	-60	216/5 = **43,2**
B	5	3	-5	-3	0	16/5 = **3,2**

Medidas de dispersão - Variância

Variância populacional

é a média dos quadrados dos desvios em relação à média aritmética.

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Estimador da variância populacional (variância amostral):

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_i^n x_i\right)^2}{n}\right]$$

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo:

- **Máquina A**:

- **Máquina B**:

Exemplo:

- **Máquina A**:

$$S^2_{X_1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5-1}$$
$$= \frac{(152-200)^2 + (248-200)^2 + (260-200)^2 + (200-200)^2 + (140-200)^2}{4}$$
$$= 2952g^2$$

- **Máquina B**:

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo:

- **Máquina A**:

$$S^2_{X_1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5-1}$$

$$= \frac{(152-200)^2 + (248-200)^2 + (260-200)^2 + (200-200)^2 + (140-200)^2}{4}$$

$$= 2952g^2$$

- **Máquina B**:

$$S^2_{X_2} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5-1}$$

$$= \frac{(205-200)^2 + (203-200)^2 + (195-200)^2 + (197-200)^2 + (200-200)^2}{4}$$

$$= 17g^2$$

Medidas de dispersão - Variância

Dados agrupados em tabelas de frequências

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i e_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

em que k corresponde ao número de diferentes valores para a variável e $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

Ou ainda,

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2}{n}\right]$$

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Em trinta vasos, foi observado, em cada vaso, o número de estacas enraizadas num total de quatro estacas, cujos dados são apresentado na tabela a seguir:

X_i	f_i
0	7
1	12
2	8
3	2
4	1
Total	30

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Em trinta vasos, foi observado, em cada vaso, o número de estacas enraizadas num total de quatro estacas, cujos dados são apresentado na tabela a seguir:

X_i	f_i
0	7
1	12
2	8
3	2
4	1
Total	30

- Média

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Em trinta vasos, foi observado, em cada vaso, o número de estacas enraizadas num total de quatro estacas, cujos dados são apresentado na tabela a seguir:

X_i	f_i
0	7
1	12
2	8
3	2
4	1
Total	30

- Média

$$\bar{x} = \frac{0 \times 7 + 1 \times 12 + \ldots + 4 \times 1}{30}$$
$$= 1,27 \text{ estacas}$$

Exemplo: Em trinta vasos, foi observado, em cada vaso, o número de estacas enraizadas num total de quatro estacas, cujos dados são apresentado na tabela a seguir:

X_i	f_i
0	7
1	12
2	8
3	2
4	1
Total	30

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Em trinta vasos, foi observado, em cada vaso, o número de estacas enraizadas num total de quatro estacas, cujos dados são apresentado na tabela a seguir:

X_i	f_i
0	7
1	12
2	8
3	2
4	1
Total	30

- Variância

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Em trinta vasos, foi observado, em cada vaso, o número de estacas enraizadas num total de quatro estacas, cujos dados são apresentado na tabela a seguir:

X_i	f_i
0	7
1	12
2	8
3	2
4	1
Total	30

- Variância

$$S_X^2 = \frac{7(0-1,27)^2 + 12(1-1,27)^2 + \ldots + 1(4-1,27)^2}{30-1}$$

$$= 1,03 \text{ estacas}^2$$

Medidas de dispersão - Variância

Dados agrupados em tabelas de classes frequências

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i e_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i^* - \bar{x})^2$$

em que k corresponde ao número de diferentes valores para a variável e $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

Ou ainda,

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i {x_i^*}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^*\right)^2}{n}\right]$$

Exemplo: Foram avaliados 196 árvores com relação ao diâmetro, em cm (floresta plantada), cujos dados são apresentados na tabela a seguir.

Diâmetro (cm)	x_i^*	f_i
4,0 $\vdash$ 6,0	5,0	17
6,0 $\vdash$ 8,0	7,0	21
8,0 $\vdash$ 10,0	9,0	35
10,0 $\vdash$ 12,0	11,0	40
12,0 $\vdash$ 14,0	13,0	38
14,0 $\vdash$ 16,0	15,0	24
16,0 $\vdash$ 18,0	17,0	13
18,0 $\vdash$ 20,0	19,0	8
Total		196

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Foram avaliados 196 árvores com relação ao diâmetro, em cm (floresta plantada), cujos dados são apresentados na tabela a seguir.

Diâmetro (cm)	x_i^*	f_i
4,0 ⊢ 6,0	5,0	17
6,0 ⊢ 8,0	7,0	21
8,0 ⊢ 10,0	9,0	35
10,0 ⊢ 12,0	11,0	40
12,0 ⊢ 14,0	13,0	38
14,0 ⊢ 16,0	15,0	24
16,0 ⊢ 18,0	17,0	13
18,0 ⊢ 20,0	19,0	8
Total		196

- Média

$$\bar{x} = \frac{5,0 \times 17 + 7,0 \times 21 + \ldots + 19,0 \times 8}{196} = 11,30 \text{ cm}$$

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Foram avaliados 196 árvores com relação ao diâmetro, em cm (floresta plantada), cujos dados são apresentados na tabela a seguir.

Diâmetro (cm)	x_i^*	f_i
4,0 $\vdash$ 6,0	5,0	17
6,0 $\vdash$ 8,0	7,0	21
8,0 $\vdash$ 10,0	9,0	35
10,0 $\vdash$ 12,0	11,0	40
12,0 $\vdash$ 14,0	13,0	38
14,0 $\vdash$ 16,0	15,0	24
16,0 $\vdash$ 18,0	17,0	13
18,0 $\vdash$ 20,0	19,0	8
Total		196

Medidas de dispersão - Variância

Exemplo: Foram avaliados 196 árvores com relação ao diâmetro, em cm (floresta plantada), cujos dados são apresentados na tabela a seguir.

Diâmetro (cm)	x_i^*	f_i
$4,0 \vdash 6,0$	5,0	17
$6,0 \vdash 8,0$	7,0	21
$8,0 \vdash 10,0$	9,0	35
$10,0 \vdash 12,0$	11,0	40
$12,0 \vdash 14,0$	13,0	38
$14,0 \vdash 16,0$	15,0	24
$16,0 \vdash 18,0$	17,0	13
$18,0 \vdash 20,0$	19,0	8
Total		196

- Variância

$$\frac{\sum_{k=1}^{8} 17 \times (5,0 - 11,30)^2 + 21 \times (7,0 - 11,30)^2 + \ldots + 8 \times (19,0 - 11,30)^2}{196 - 1}$$
$$= 2586,84/195 = 13,27 \text{ cm}^2$$

Medidas de dispersão - Desvio Padrão

O desvio padrão

corresponde à raiz quadrada da variância,

$$S_X = \sqrt{S_X^2}$$

O desvio padrão tem a mesma unidade dos dados originais

Exemplo: Considerando os dados de diâmetro das árvores:

Exemplo: Considerando os dados de diâmetro das árvores:

$$S_X = \sqrt{13,27} = 3,64 \text{ cm}$$

Medidas de dispersão - Coeficiente de Variação

O **coeficiente de variação** é dado por

$$CV_X = 100\frac{S_X}{\bar{x}}$$

O CV é adimensional, pode-se comparar a dispersão de variáveis com diferentes unidades de medida.

Orientação

$$\begin{aligned}
\text{CV} \leq 10\% &\quad\Rightarrow\quad \text{baixo}\\
10\% < \text{CV} \leq 20\% &\quad\Rightarrow\quad \text{médio}\\
20\% < \text{CV} \leq 30\% &\quad\Rightarrow\quad \text{alto}\\
\text{CV} > 30\% &\quad\Rightarrow\quad \text{muito alto}
\end{aligned}$$

Não tome as sugestões como regra, o CV não é invariável a transformações.

Exemplo: Considerando os dados de diâmetro das árvores:

Exemplo: Considerando os dados de diâmetro das árvores:

$$CV_X = 100\frac{3,64}{11,30} = 32,21\%$$

Medidas de dispersão - Gráfico de Caixas

O gráfico de caixas ou **box-plot** resume a distribuição dos dados em uma representação bastante informativa. Têm-se como principais aspectos observados no box-plot:

- Simetria ou assimetria da distribuição;
- Amplitude de variação;
- Observações atípicas.

Medidas de dispersão - Gráfico de Caixas

O gráfico de caixas ou **box-plot** resume a distribuição dos dados em uma representação bastante informativa. Têm-se como principais aspectos observados no box-plot:

- Simetria ou assimetria da distribuição;
- Amplitude de variação;
- Observações atípicas.

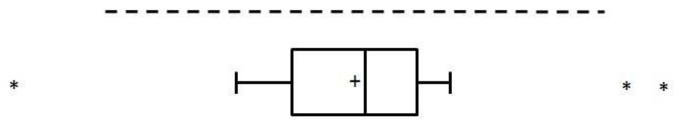


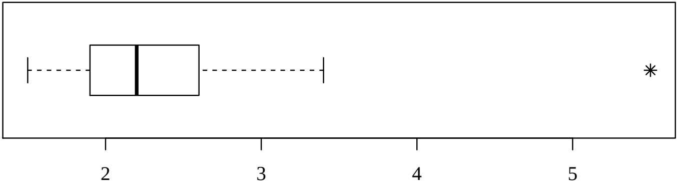
Figura: Exemplo de um box-plot ou gráfico de caixas.

Construção de um gráfico de caixas

1. Calcular o primeiro quartil (Q_1), a mediana (Md) e o terceiro quartil (Q_3);
2. Calcular a AIQ = $Q_3 - Q_1$;
3. Verificar a existência de observações atípicas, ou seja, valores menores do que $Q_1 - 1,5\text{AIQ}$ ou maiores do que $Q_3 + 1,5\text{AIQ}$;
4. Calcular os limites inferior e superior dos dados sem considerar as observações atípicas;
5. Construir o gráfico seguindo o esquema a seguir:

Exemplo: Para os valores observados de produção anual de resina de árvores de *Pinus elliottii*, em kg, tem-se:

1,5	1,8	1,9	2,0	2,1
2,3	2,3	2,6	3,4	5,5



Medidas de posição e dispersão - Software R

```
# Armazenando os dados
resina <- c(1.5, 1.8, 1.9, 2, 2.1, 2.3, 2.3, 2.6, 3.4, 5.5)

# Calculando algumas estatísticas
c("Média" = mean(resina),
  "Mediana" = median(resina),
  "Variância" = var(resina),
  "Desvio padrão" = sd(resina))

##          Média        Mediana      Variância Desvio padrão
##       2,540000       2,200000       1,349333      1,161608

# Alguns quantis
quantile(resina, probs = c(0.1, 0.25, 0.5, 0.8))

##   10%   25%   50%   80%
## 1,770 1,925 2,200 2,760

# Um resumo genérico
summary(resina)

##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   1,500   1,925   2,200   2,540   2,525   5,500
```

Programando o cálculo de algumas estatísticas

```r
# Mínimo e máximo
range(resina)

## [1] 1,5 5,5

# Amplitude
diff(range(resina))

## [1] 4

# Amplitude interquartílica
diff(quantile(resina, c(0.25, 0.75), names = FALSE))

## [1] 0,6

# Coeficiente de variação
sd(resina) / mean(resina)

## [1] 0,457326
```

Suíte gráfica

```r
# Dados versus índice
plot(resina)

# Histograma
hist(resina)

# Boxplot
boxplot(resina)

# Para curiosos
demo(graphics)
```